

Oplossing van v7267.htm

Vrijdag 15 maart 2013 werd er geloot in de "Europa League" om te weten te komen welke acht ploegen tegen mekaar zouden moeten spelen. Bij die acht waren er nog drie Engelse ploegen : **Chelsea, Tottenham en Newcastle.**

Bij de loting hebben de drie Engelse ploegen mekaar kunnen ontlopen, m.a.w. elke Engelse ploeg speelt tegen een niet-Engelse ploeg.

Wat is nu de kans dat bij zo'n loting die drie ploegen elkaar ontlopen ?

Oplossing :

1^{ste} manier :

Acht ploegen in vier duo's verdelen kan op $7 \times 5 \times 3 = 105$ manieren .

(dit getal is ook te vinden met $\frac{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{P_4} = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 105$)

Duo's maken waarin maximum één Engelse ploeg zit kan door 1 niet-Engelse ploeg te plaatsen bij een Engelse ploeg. Vermits er 5 niet-Engelse ploegen zijn en 3 Engelse ploegen kan dit op $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ manieren. (Merk op : Variaties en niet Combinaties want ook de volgorde speelt een rol !).

Vandaar dat de kans $\frac{60}{105} = \frac{4}{7}$ is.

2^{de} manier : We gebruiken de algemene productwet : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Noem de drie Engelse ploegen E_1, E_2 en E_3 en kies eerst voor E_1 een niet-Engelse tegenstander (kans 5 op 7) en daarna voor E_2 een niet-Engelse tegenstander.

We moeten de kans berekenen dat E_1 én E_2 geen Engelse ploeg als tegenstander gaan krijgen. Als die voorwaarde vervuld is zal automatisch E_3 geen Engelse tegenstander meer kunnen hebben !! Vandaar dat onze kansberekening nu

verfrissend eenvoudig is : $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{7}$

3^{de} manier : met Permutaties

Zet alle acht ploegen $E_1 E_2 E_3 U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$ op een rijtje (wat kan gebeuren op $P_8 = 8!$ manieren) en beschouw dan $E_1 E_2 E_3 U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$ als de confrontaties van twee ploegen die uit de bus komen. De kunst is nu van te tellen hoeveel van die $8!$ permutaties GEEN confrontaties opleveren met Engelse ploegen.

We starten met 3 plaatsen (in volgorde) te kiezen uit 4 om daar een Engelse ploeg te 'droppen'. De resterende plaatsen worden dan ingenomen door U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 die echter ook nog gepermuteerd mogen worden ($P_5 = 5!$ manieren)

Bovendien kan elk van de drie duo's met Engelse ploegen nog eens gepermuteerd worden zodanig dat we voor de kans verkrijgen :

$$\frac{V_4^3 \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}{8!} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot (\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2})}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}} = \frac{4}{7}$$

De permutatie van het duo niet-Engelse ploegen zit al 'verweven' in P_5 .

Vandaar dat je $2! \cdot 2! \cdot 2!$ ziet en niet $2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$